

ОТЗЫВ

о диссертации Григорьева Олега Александровича

"Конформные отображения прямоугольных многоугольников:
численно-аналитический метод "

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.07 – вычислительная математика

Диссертация относится к вычислительным методам комплексного анализа, конкретно к важному разделу – численным и аналитическим методам конформных отображений. Это классическое направление всегда, вызывающее интерес в виду многочисленных приложений. В первой половине прошлого века серьезное развитие получили аналитические методы построения конформных отображений (особенно в связи с приложениями к аэродинамике), в середине и второй половине века (вместе с возникновением компьютеров) приоритет получило развитие численных методов. Первые численные методы отображения односвязных и многосвязных областей с гладкими границами отражены в знаменитой монографии D. Gaier, *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*, Springer-Verlag, Berlin 1964 xiii+294 pp. Эти методики основывались на численных решениях интегральных уравнений и решении нелинейных уравнений для определения функций соответствия границ. В нашей стране в это время был реализован на ЭВМ БЭСМ-6 метод К.И. Бабенко, основанный на решении (без насыщения) интегрального уравнения Фредгольма для плотности потенциала двойного слоя, и нахождении с помощью метода Ньютона функции соответствия границ. Затем обозначился интерес к отображению областей с негладкими границами и, в частности, многоугольников. Интерес был вызван трудностью задачи, связанной с эффектом краудинга (сучивания), когда плотность гармонической меры экспоненциально возрастала в отдельных точках границы, в результате чего происходила значительная потеря точности. В этом направлении в конце прошлого и начале нынешнего века были разработаны несколько прикладных пакетов такими известными математиками как Треффетен, Папамайкл, Дрискол и другие. Несмотря на определенный прогресс, проблема краудинга еще далека от своего разрешения.

Все вышесказанное определяет **актуальность тематики** этой диссертации.

Перейдем непосредственно к рассмотрению диссертации О.А. Григорьева. В ней разрабатывается численно-аналитический метод конформного отображения верхней полуплоскости на прямоугольные (с кратными $\pi/2$ углами) многоугольники. Исследуется точность метода при возникновении краудинга (сучивания). Разработанный метод применяется к решению некоторых прикладных задач, например, задаче построения ортогональных сеток в прямоугольных каналах с гребенчатым оребрением.

Диссертация общим объемом 86 страниц состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 78 наименования.

Во **Введении** приведен довольно-таки подробный обзор классических и современных численных методов конформных отображений. Формулируются цели работы и фиксируются постановки исследуемых задач.

В **Главе 1** излагается численно-аналитический метод конформного отображения верхней полуплоскости на прямоугольные многоугольники. Метод основан на подходе А.Б. Богатырева. Речь идет о связи интеграла Кристоффеля-Шварца для прямоугольных многоугольников с абелевыми интегралами на гиперэллиптических римановых поверхностях с последующим обращением этих интегралов. В главе 1 дается не только описание метода, но и проводится его детальное обоснование. Приводятся основные сведения об абелевых интегралах (пункт 1.1). Доказывается Теорема 1.3 о представлении дифференциала Кристоффеля-Шварца для неограниченных прямоугольных многоугольников в виде дифференциала 1-го рода и суммы дифференциалов 3-го рода с особенностями в прообразах бесконечно удаленных вершин многоугольника и с коэффициентом в виде произведения ширины, уходящего на бесконечность канала, на его направление. Эта теорема кладется в основание предлагаемого метода. Затем, в пункте 1.2 дается конкретное описание метода вычисления интеграла Кристоффеля-Шварца (без использования квадратур), т.е. метода вычисления конформного отображения (в предположении наличия вспомогательных параметров). Метод основан на представлении Римана для абелева интеграла 3-го рода в виде логарифма отношения зэта-функций Римана, которые, в свою очередь, приближаются несколькими членами их супербыстро сходящегося ряда Фурье. Наконец, в пункте 1.3 получаются системы на вспомогательные параметры для конкретных многоугольников, используемых в последующих приложениях. Надо отметить, что получение этих нелинейных систем (Теоремы 1.9 и 1.10) и их решение в **Главе 2** представляет собой основной новый момент диссертации. В пункте 2.1 определяется пространство модулей прямоугольных пятиугольников (именно такого сорта многоугольники будут допустимы для создаваемого алгоритма, отметим, что в предшествующей работе А.Б. Богатырева речь шла о семиугольниках). Далее это пространство представляется как пространство гиперэллиптических кривых рода 2 с тремя отмеченными точками. В результате получается шестимерное вещественное координатное пространство для описания допустимых пятиугольников. В этом координатном пространстве строится метод Ньютона для решения нелинейных систем уравнений, определяющих вспомогательные параметры. В пунктах 2.2 и 2.3 рассмотрено влияние краудинга на вспомогательные параметры и предложен способ перехода к другой системе параметров с помощью модулярных преобразований.

Глава 3 посвящена численным экспериментам и приложениям. В этой главе описаны численные эксперименты по генерации ортогональных сеток и их сравнение с пакетом SCPACK (пункт 3.1). Приведены результаты вычислений различных гармонических векторных полей (пункт 3.2). Проведено сравнение с пакетом Ani2D решений задачи Дирихле в многоугольных областях. И, наконец, пожалуй самое интересное, в пункте 3.4 проведено исследование влияния гребчатого оребрения на устойчивость течения Пуазеля.

Итак, основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Предложенный ранее А.Б. Богатыревым полуаналитический метод вычисления конформных отображений прямоугольных многоугольников расширен на многоугольники со сложной геометрией. Для многоугольников, имеющих до 8 прямых углов и до 5 выходов на бесконечность, построена система уравнений на вспомогательные параметры и программно реализован алгоритм их численного решения.

2. Для приближенного решения системы на вспомогательные параметры применены модулярные преобразования. Численные эксперименты показывают, что использование этой методологии позволяет находить параметры отображения с хорошей точностью даже в условиях сильного сгущивания точек.

3. Произведена проверка точности вычислительных пакетов SCPACK и Ani2D на задачах, включающих в себя многоугольники, моделирующие различные особенности плоских областей (разрезы, входящие углы, узкие перешейки, выходы на бесконечность и т.д.)

4. Для исследования задачи устойчивости течения в канале с гребенчатым оребрением предложены автоматически генерируемые конформные сетки.

Характеризуя диссертацию в целом, отметим, что полученные в ней результаты являются новыми. Математические положения снабжены строгими, подробными доказательствами. Проведено сравнение точности и эффективности предлагаемых численных методов с известными пакетами программ для решения аналогичных задач.

Результаты диссертации имеют теоретический характер. Они могут найти применение в теории аппроксимаций, в теории потенциала, в теории граничных свойств аналитических функций. Предложенный алгоритм безусловно может использоваться в многочисленных приложениях: для построения ортогональных сеток, для тестирования других комплексов программ, для генерирования начальных приближений в более сложных задачах. Результаты также могут быть использованы в исследованиях проводимых в МГУ, МИРАН им. Стеклова, ИПМ им. Келдыша РАН, Вычислительном центре им. А.А. Дородникова РАН, Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана.

Диссертация должным образом оформлена, результаты апробированы и своевременно опубликованы в ведущих математических изданиях, автореферат адекватно отражает содержание диссертации. Серьезных замечаний по работе нет. Можем лишь отметить наличие в тексте ряда опечаток.

На основе изложенного считаем, что рассматриваемая диссертационная работа "Конформные отображения прямоугольных многоугольников: численно-аналитический метод" являет собой научно-квалифицированную работу, по специальности 01.01.07 – вычислительная математика, она соответствует положению о порядке присуждения ученых степеней и удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Григорьев Олег Александрович, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

21.02.2015

Профессор, доктор физико-математических наук

А.И.Аптекарев

Подпись д.ф.-м.н. А.И.Аптекарева заверяю, Ученый секретарь Института Прикладной Математики им. М.В.Келдыша РАН, к.ф.-м.н.

А.И.Маслов



Аптекарев Александр Иванович

Почтовый адрес: 125047, Москва, Миусская пл., д.4

Телефон: (499) 978-13-14

Адрес электронной почты: office@keldysh.ru